

Fondamenti fisici (e “buchi” teorici) dei modelli Gaussiani

di: Patrizia Favaron

The background is a gradient from a deep red at the top to a bright white at the bottom. Overlaid on this is a complex network of thin white lines connecting numerous small white dots of varying sizes, creating a web-like or molecular structure.

Prologo...

Il «modello Gaussiano» (Pasquill & multi al.)

$$c(x, z, t) = \frac{Q}{2u\pi\sigma_y\sigma_z} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \cdot \left[s\left(\frac{z-H}{\sigma_z}, \frac{z_i}{\sigma_z}\right) + s\left(\frac{z+H}{\sigma_z}, \frac{z_i}{\sigma_z}\right) \right]$$

- $s\left(\frac{\zeta}{\sigma_z}, \frac{z_i}{\sigma_z}\right) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(\zeta + 2jz_i)^2}{\sigma_z^2}\right]$
- z_i è lo spessore del PBL
- H è la quota di emissione
- σ_y, σ_z sono i parametri di dispersione (funzioni della distanza sottovento x e del grado di «stabilità» dell'atmosfera)

Il «modello Gaussiano»

Bellissimo, vero?

Qualcuno lo adopera ancora...

Di solito nessuno si chiede come ci si è arrivati

Oggi vedremo di capirlo, con un'esplorazione di *archeologia fisica*

E da buone archeologhe ed archeologi, vediamo di mettere tutto nel suo contesto storico

Volere, e Potere

Abbiamo necessità.

E un gran desiderio di soddisfarle.

Il modo in cui lo facciamo, dipende
anche dalla tecnologia di cui
disponiamo.





1917, attacco francese con i gas verso le linee tedesche

London, 1952, the Great Smog (4000 morti in 5 giorni)



Problemi diversi, ma una cosa in comune

- Perché gli effetti erano diversi a seconda dei giorni? Dell'ora nel giorno?
- E perché la sola velocità del vento non spiegava tutto?

Instantaneous Plume Shape



Time-averaged Plume Shape



Ma lo strumento di
calcolo disponibile era...





Sarebbe molto *bello* se...

Ma, appunto...

- Nel 1961 i computer esistevano già
- Ma mica potevi usarli per studiare la dispersione di inquinanti!
- Quindi, metodi numerici, niente da fare...
- Quindi e quindi ancora: Privilegiare metodi analitici

Una piccola curiosità storica

- Il film «Il diritto di contare» è bellissimo, e ne consiglio la visione – magari guardandolo *anche* nei suoi risvolti scientifici.
- Ma non dice una cosa interessante: il rapporto tecnico che l'Ammiraglio Kathleen Johnson (che allora non era ancora ammiraglio) scrisse insieme al suo capo, presenta una soluzione *analitica* al calcolo delle orbite.
- Soluzione, approssimabile però tramite una serie di Fourier.
- Difficile, quindi, che la vera Kathleen Johnson abbia proposto di usare il «metodo di Eulero»: aveva a disposizione molto di meglio.

Sviluppo del modello di dispersione gaussiano

I passaggi



Come avrà ragionato il professor Pasquill?

Si sarà detto: voglio una soluzione che poi io, e la gente della mia generazione, possiamo usare.

Cioè, *analitica*, traducibile in *tavole numeriche* (di carta).

Partendo dall'equazione che descrive la dispersione (già conosciuta da lungo tempo).

Quello che seguirà metterà a dura prova il vostro stomaco. Quindi *non lasciatevi impressionare*, e mentre dico cose, per carità del cielo, *restate fisici*

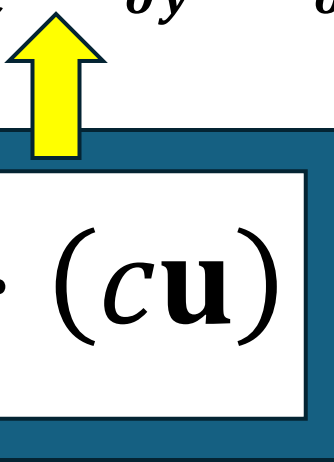
Il punto di partenza:
l'equazione di advezione-diffusione

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla c) + S$$

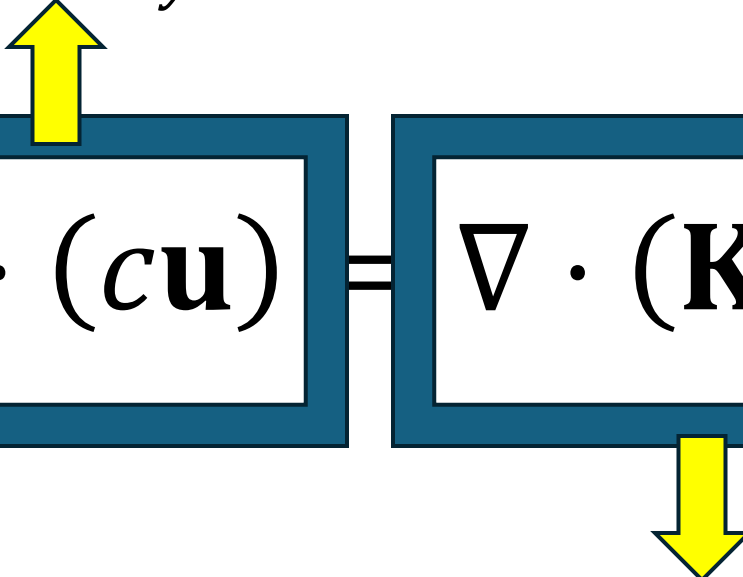
Il punto di partenza:
l'equazione di advezione-diffusione

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \boxed{\nabla \cdot (c\mathbf{u})} = \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla c) + S$$

$\text{div } c\mathbf{u} = \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z}$



Il punto di partenza:
l'equazione di advezione-diffusione

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \boxed{\nabla \cdot (c\mathbf{u})} = \boxed{\nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla c)} + S$$


$\text{div } c\mathbf{u} = \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z}$

$$\text{div } (\mathbf{K} \text{ grad } c) = k_{xx} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + k_{zz} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

E adesso?

- Bella, l'equazione di advezione-diffusione
- Ma adesso?
- Se assumiamo che il «campo di vento» $\mathbf{u} = [u, v, w]$ possa variare come vuole nel tempo e nello spazio, addio: nessuna possibilità di soluzione analitica.

E adesso?

- Bella, l'equazione di advezione-diffusione
- Ma adesso?
- Se assumiamo che il «campo di vento» $\mathbf{u} = [u, v, w]$ possa variare come vuole nel tempo e nello spazio, addio: nessuna possibilità di soluzione analitica.

Quindi:

Dobbiamo fare qualche ipotesi e semplificare

La motosega del professor Pasquill

Una raffica di ipotesi a fin di bene – *Spoiler alert:* Parte **importantissima**

Ipotesi 1

Il tracciante è emesso da un punto preciso dello spazio, che identifichiamo con

$$P = (0,0,H)$$

con $H > 0$ (insomma: in alto, e non sotto terra).

Ipotesi 2

L'emissione avviene ad un rateo

Q

costante nel tempo. E così, possiamo dire

$$S = Q \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z - H)$$

$(\delta(q))$: funzione «delta» di Dirac)

Ipotesi 3

Il vento è uniforme nello spazio, costante nel tempo, ed allineato all'asse delle x :

$$\mathbf{u} = [u, 0, 0]$$

Ipotesi 4

Ci interessa una soluzione *stazionaria*,

$$\frac{\partial}{\partial t} c(x, y, z, t) = 0$$

Ipotesi 5

La matrice di diffusività, $\mathbf{K}$, è diagonale

Ipotesi 6

La matrice di diffusività, $\mathbf{K}$, è diagonale, e si ha

$$K_{xx}(x, y, z, t) = K_{yy}(x, y, z, t) \\ = K_{zz}(x, y, z, t) = K(x)$$

Ipotesi 7

La velocità del vento è maggiore della velocità di «retro-diffusione» dovuta alla turbolenza

Ipotesi 8

Il terreno è perfettamente piatto e orizzontale, e coincide con il piano di equazione

$$z = 0$$

Ipotesi 9

La sostanza inquinante non penetra attraverso il terreno

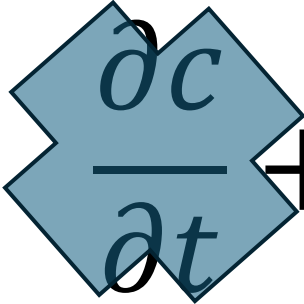
Accensione, e via!

Attenzione: anche questo è un punto *importantissimo*; Spoiler alert: vediamo di ricordare quanto più possiamo

Primo passo: soluzione stazionaria, giusto?

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla c) + S$$

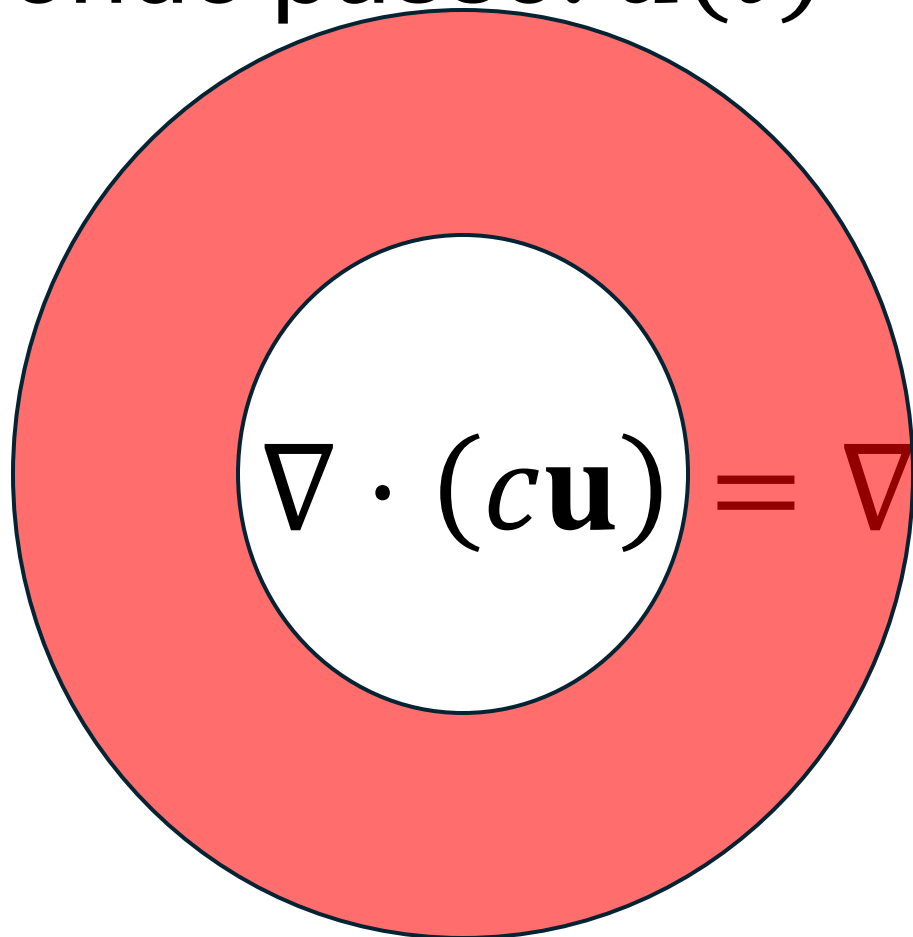
Primo passo: soluzione stazionaria, giusto?


$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla c) + S$$

Primo passo: soluzione stazionaria, giusto?

$$\nabla \cdot (c\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla c) + S$$

Secondo passo: $\mathbf{u}(t) = [u, 0, 0]$


$$\nabla \cdot (c \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla c) + S$$

Secondo passo: $\mathbf{u}(t) = [u, 0, 0]$

$$\nabla \cdot (c\mathbf{u}) = \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z}$$

Secondo passo: $\mathbf{u}(t) = [u, 0, 0]$

$$\nabla \cdot (c\mathbf{u}) = \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c0}{\partial y} + \frac{\partial c0}{\partial z}$$

Secondo passo: $\mathbf{u}(t) = [u, 0, 0]$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (c\mathbf{u}) &= \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z} = \\ \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c0}{\partial y} + \frac{\partial c0}{\partial z} &= \frac{\partial cu}{\partial x} + 0 + 0\end{aligned}$$

Secondo passo: $\mathbf{u}(t) = [u, 0, 0]$

$$\nabla \cdot (c\mathbf{u}) = \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c0}{\partial y} + \frac{\partial c0}{\partial z} = \frac{\partial cu}{\partial x} + 0 + 0 = \frac{\partial cu}{\partial x}$$

Secondo passo: $\mathbf{u}(t) = [u, 0, 0]$

$$\nabla \cdot (c\mathbf{u}) = \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c0}{\partial y} + \frac{\partial c0}{\partial z} = \frac{\partial cu}{\partial x} + 0 + 0 = \frac{\partial cu}{\partial x} =$$

$$c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial x} u$$

Secondo passo: $\mathbf{u}(t) = [u, 0, 0]$

$$\nabla \cdot (c\mathbf{u}) = \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c0}{\partial y} + \frac{\partial c0}{\partial z} = \frac{\partial cu}{\partial x} + 0 + 0 = \frac{\partial cu}{\partial x} =$$

$$c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial x} u = c0 + \frac{\partial c}{\partial x} u$$

Secondo passo: $\mathbf{u}(t) = [u, 0, 0]$

$$\nabla \cdot (c\mathbf{u}) = \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c0}{\partial y} + \frac{\partial c0}{\partial z} = \frac{\partial cu}{\partial x} + 0 + 0 = \frac{\partial cu}{\partial x} =$$
$$c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial x} u = c0 + \frac{\partial c}{\partial x} u = \frac{\partial c}{\partial x} u$$

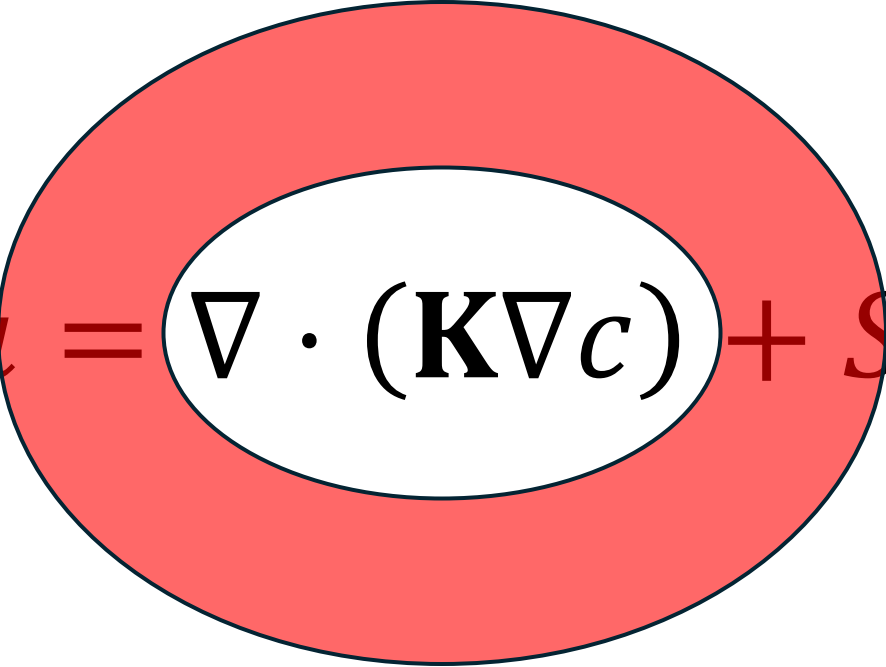
Secondo passo: $\mathbf{u}(t) = [u, 0, 0]$

$$\boxed{\nabla \cdot (c\mathbf{u})} = \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z} =$$
$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c0}{\partial y} + \frac{\partial c0}{\partial z} = \frac{\partial cu}{\partial x} + 0 + 0 = \frac{\partial cu}{\partial x} =$$
$$c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial x} u = c0 + \frac{\partial c}{\partial x} u = \boxed{\frac{\partial c}{\partial x} u}$$

Secondo passo: $\mathbf{u}(t) = [u, 0, 0]$

$$\frac{\partial c}{\partial x} u = \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla c) + S$$

Terzo passo: matrice diffusività diagonale e
suoi elementi dipendenti solo da x


$$\frac{\partial c}{\partial x} u = \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla c) + S$$

Terzo passo: matrice diffusività diagonale e
suoi elementi dipendenti solo da x

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla c) = \nabla \cdot \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial c}{\partial z} \end{bmatrix} \right) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} K_{xx}(x) \frac{\partial c}{\partial x} \\ K_{yy}(x) \frac{\partial c}{\partial y} \\ K_{zz}(x) \frac{\partial c}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Terzo passo: matrice diffusività diagonale e suoi elementi dipendenti solo da x

$$\nabla \cdot \begin{bmatrix} K_{xx}(x) \frac{\partial c}{\partial x} \\ K_{yy}(x) \frac{\partial c}{\partial y} \\ K_{zz}(x) \frac{\partial c}{\partial z} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(x) \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(x) \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$

Terzo passo: matrice diffusività diagonale e suoi elementi dipendenti solo da x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial c}{\partial x} \right) = \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + K \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(K(x) \frac{\partial c}{\partial y} \right) = \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} + K \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0 \frac{\partial c}{\partial y} + K \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = K \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K(x) \frac{\partial c}{\partial z} \right) = \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z} + K \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = 0 \frac{\partial c}{\partial z} + K \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = K \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

Terzo passo e mezzo: la velocità del vento è molto maggiore della retro-diffusione turbolenta

$$K \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

Terzo passo: matrice diffusività diagonale e suoi elementi dipendenti solo da x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial c}{\partial x} \right) = 0$$

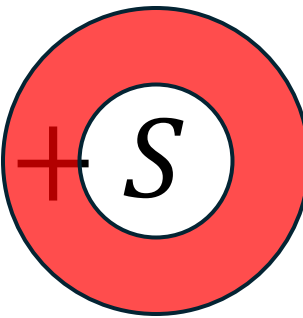
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(K(x) \frac{\partial c}{\partial y} \right) = K \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K(x) \frac{\partial c}{\partial z} \right) = K \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

Terzo passo: matrice diffusività diagonale e suoi elementi dipendenti solo da x

$$\frac{\partial c}{\partial x} u = K \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + S$$

Quarto passo: Termine di sorgente

$$\frac{\partial c}{\partial x} u = K \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + S$$


Quarto passo: Termine di sorgente

$$\frac{\partial c}{\partial x} u = K \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + Q \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z - H)$$

Ancora ipotesi!?

«Cose da scrivere in formule». Ma in realtà nulla di nuovo: le abbiamo già fatte...

Per determinare la soluzione dobbiamo imporre condizioni iniziali e ai limiti

$$\frac{\partial c}{\partial x} u = K \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + Q \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z - H)$$

$$\begin{aligned} c(0, y, x) &= 0 & c(+\infty, y, z) &= 0 \\ c(x, \pm\infty, z) &= 0 & c(x, y, +\infty) &= 0 \end{aligned}$$

$$K \frac{\partial c}{\partial z}(x, y, 0) = 0$$

Come risolvere una PDE quando non c'erano computer

Qui è archeologia pura, e andremo veloci: oggi useremmo un *Computer Algebra System* (CAS)

Guardiamola bene...

$$\frac{\partial c}{\partial x} u = K \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + Q \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z - H)$$

Oggi, in tempi di *computer algebra system*, magari la cosa non ci dice un granché.

Ma questa è un'equazione «a variabili separabili»

$$\frac{\partial c}{\partial x} u = K \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + Q \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z - H)$$

Intanto, spostiamo il termine di sorgente nelle condizioni al contorno

$$\frac{\partial c}{\partial x} u = K \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

Ricordate $K = K(x)$? Il «termine diffusivo che dipende solo da x »?

Bene.

Introduciamo la nuova variabile

$$r = \frac{1}{u} \int_0^x K(\xi) d\xi$$

Se diciamo

$$\hat{c}(r, y, z) = c(x, y, z)$$

possiamo scrivere la nostra equazione
come

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial r} = \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial z^2}$$

Il desiderio del professor Pasquill

Dell'equazione semplificata vogliamo una soluzione del tipo

$$\hat{c}(r, y, z) = \frac{Q}{u} a(r, y) b(r, z)$$

Il desiderio del professor Pasquill

Se sostituiamo nell'equazione semplificata, vediamo che questa può essere «disarticolata» in due equazioni separate:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{c}}{\partial r} = \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \cdot (0 \leq r < +\infty, -\infty < y < +\infty) \\ a(0, y) = \delta(y), a(+\infty, y) = 0, a(r, \pm\infty) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{c}}{\partial r} = \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} \cdot (0 \leq r < +\infty, 0 < z < +\infty) \\ b(0, z) = \delta(z - H), b(+\infty, z) = 0, b(r, \pm\infty) = 0, \frac{\partial b}{\partial z}(r, 0) = 0 \end{array} \right.$$

Una buona notizia

Le due equazioni si possono risolvere usando vari modi, tra cui le *trasformate di Laplace*

Che *non* useremo: fidatevi

Ma lo facessimo, otterremmo

$$a(r, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \exp\left(-\frac{y^2}{4r}\right)$$

$$b(r, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \left\{ \exp\left[-\frac{(z-H)^2}{4r}\right] + \exp\left[-\frac{(z+H)^2}{4r}\right] \right\}$$

Una buona notizia

E infine:

$$\frac{Q}{4\pi ur} \exp\left(-\frac{y^2}{4r}\right) \left\{ \exp\left[-\frac{(z-H)^2}{4r}\right] + \exp\left[-\frac{(z+H)^2}{4r}\right] \right\}$$

Molto simile all'equazione «gaussiana» di modelli come ISC3!

Bachi?!

E qui... 

Cominciamo con una stranezza

Ditemi, secondo voi, quanto potrebbe valere

$$\iiint \frac{Q}{4\pi ur} \exp\left(-\frac{y^2}{4r}\right) \left\{ \exp\left[-\frac{(z-H)^2}{4r}\right] + \exp\left[-\frac{(z+H)^2}{4r}\right] \right\} dr \, dy \, dz$$

Non provate a calcolarlo: pensate alle ipotesi tradotte in parole... Una in particolare: l'emissione è continua e costante nel tempo.

Cominciamo con una stranezza

La risposta è

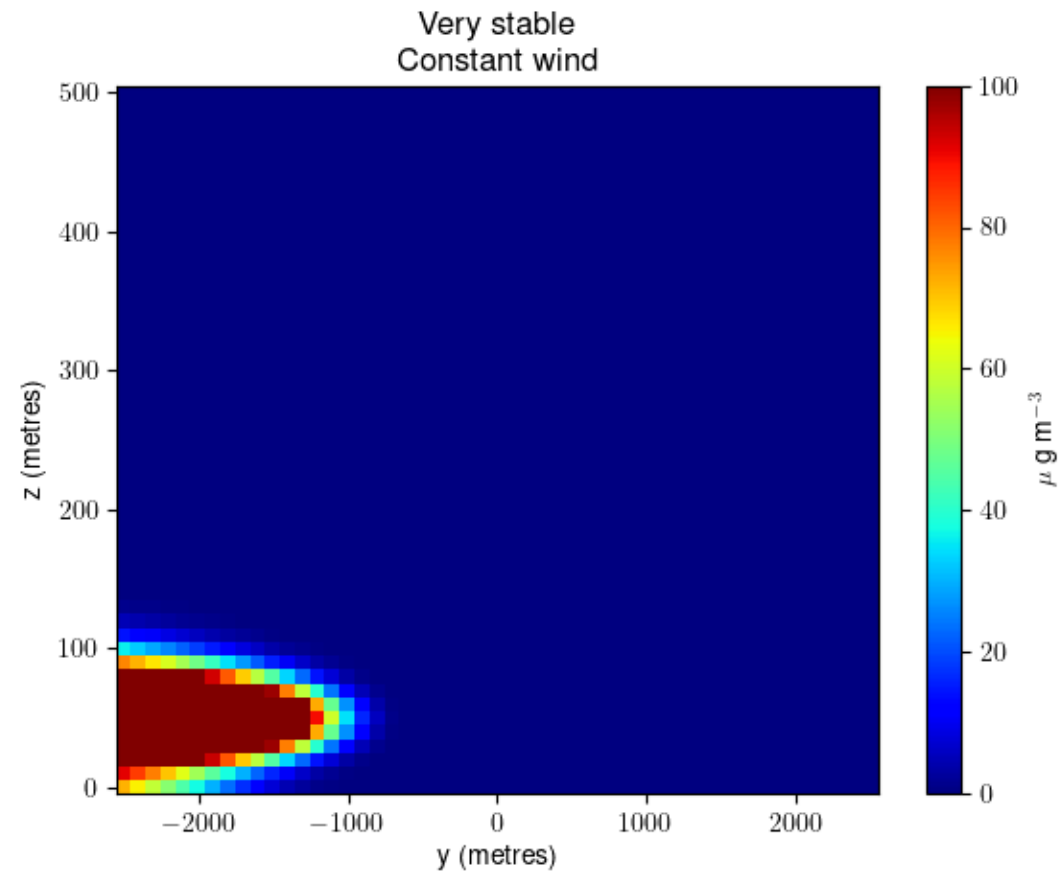


Perché?

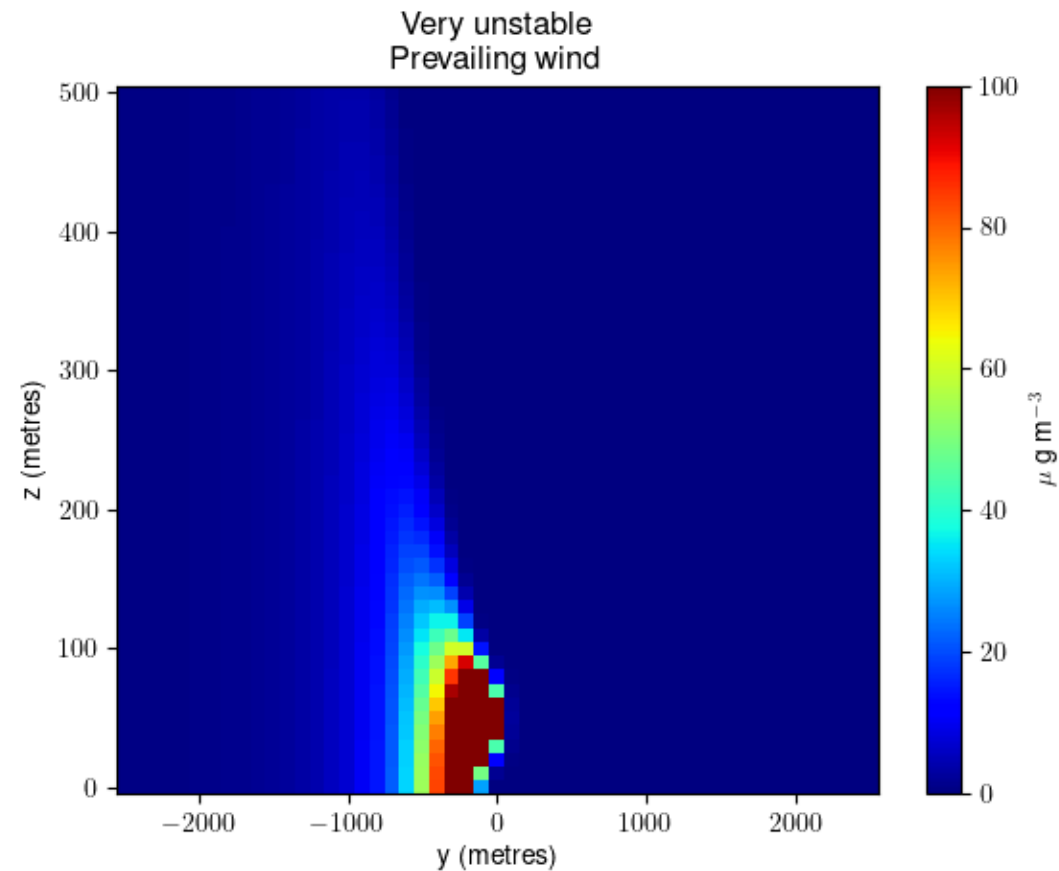
Quale delle ipotesi ha un peso, secondo voi, decisivo?

Cosa c'è di strano, tra le ipotesi *fisiche*?

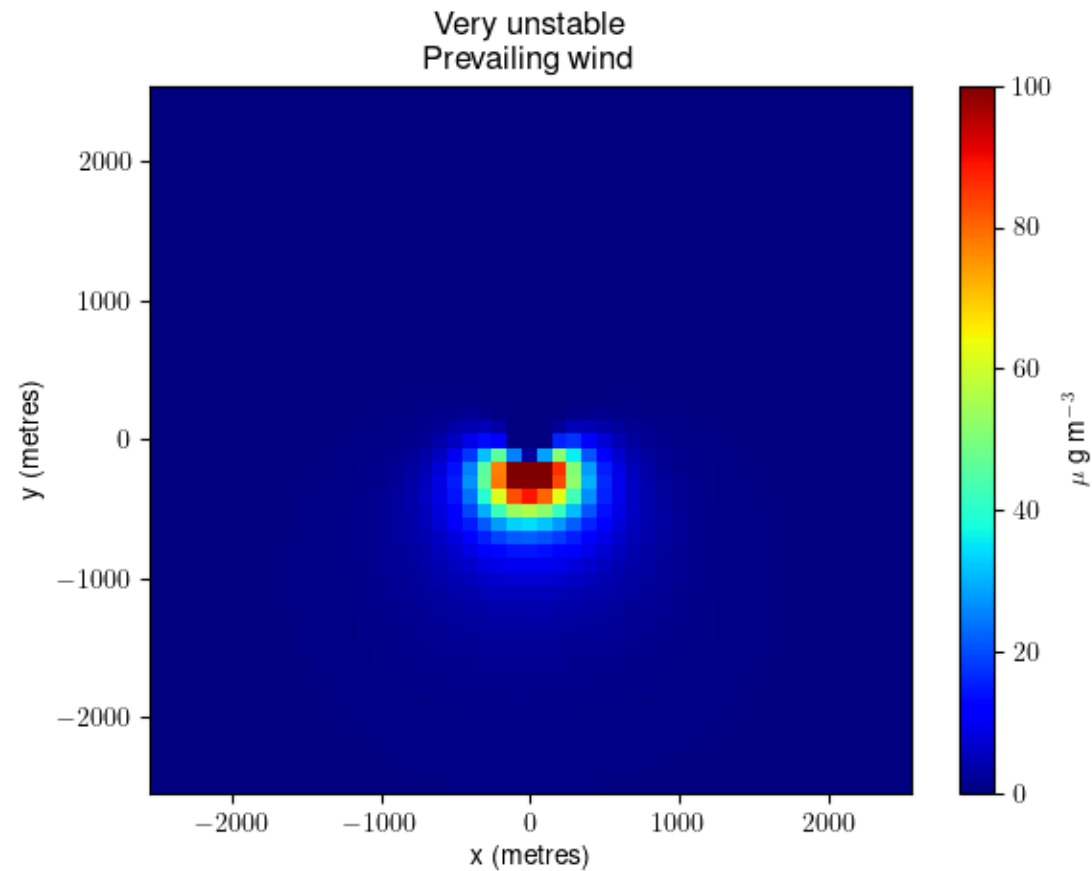
Continuiamo con tre «casi clinici»...



Continuiamo con tre «casi clinici»...



Continuiamo con tre «casi clinici»...



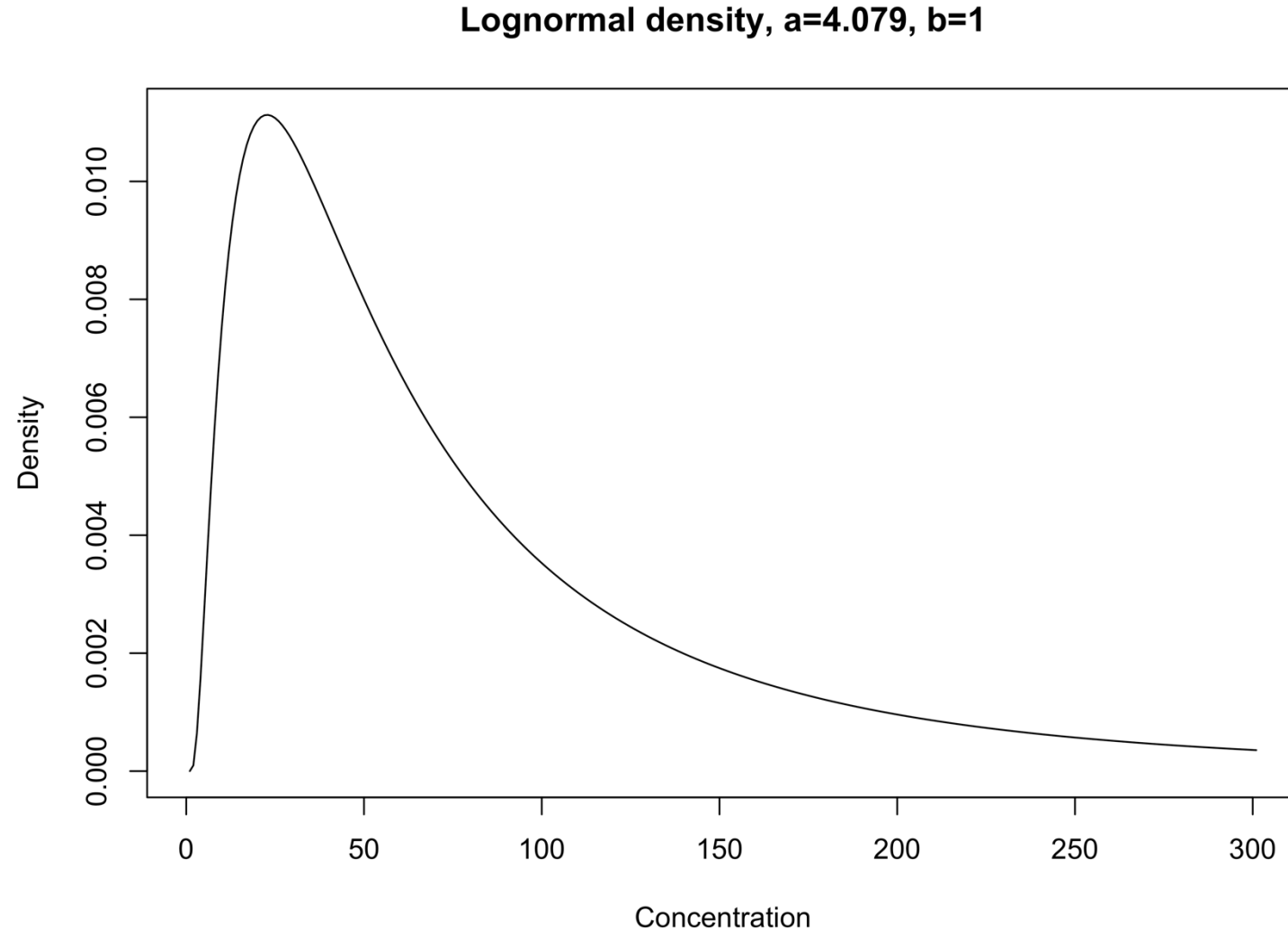
... e poniamoci una domanda

Il modello dice « $100 \mu\text{g}/\text{m}^3$ »

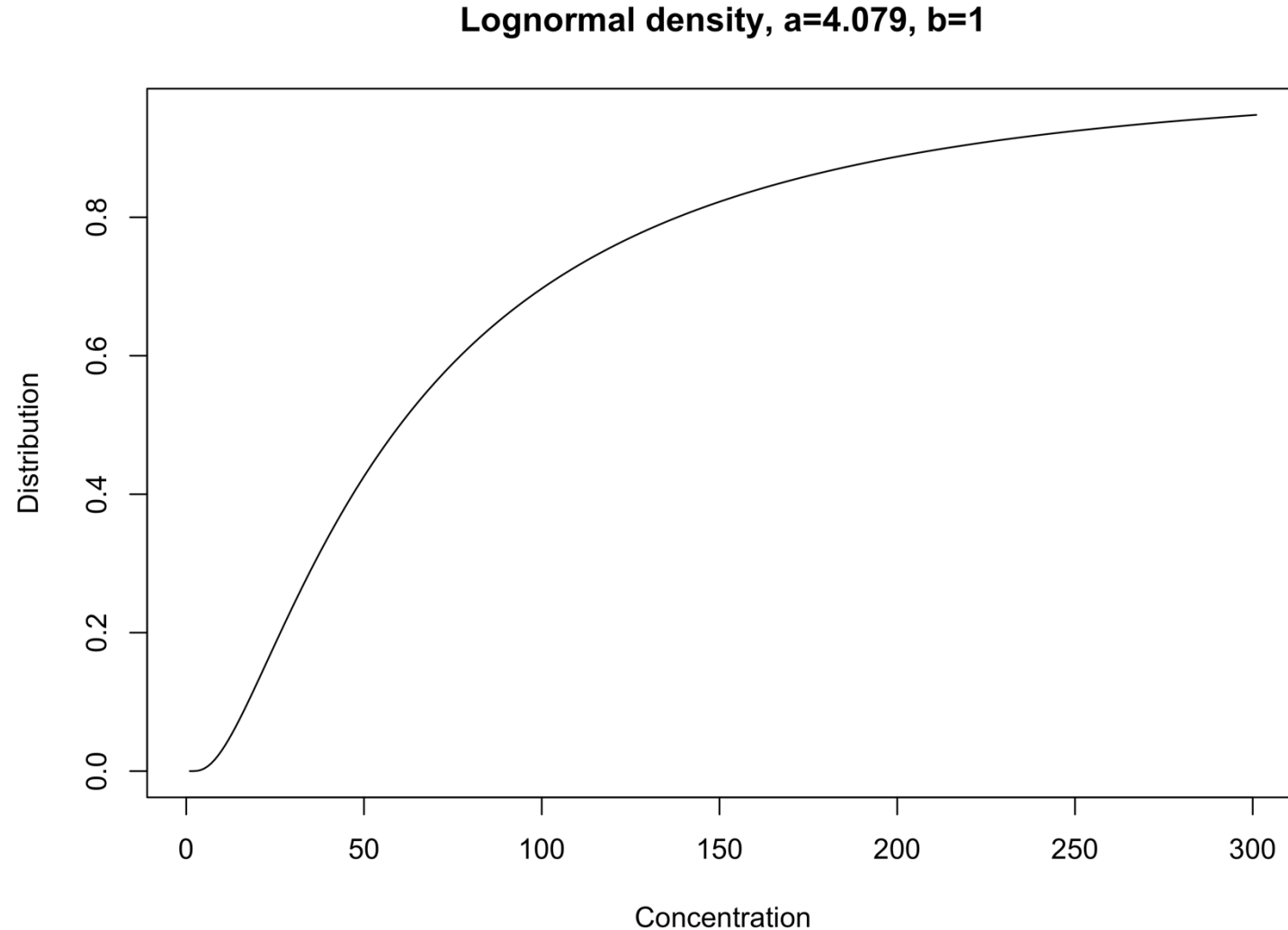
Il limite di legge è (facciamo finta) 200.

Va tutto bene, allora?

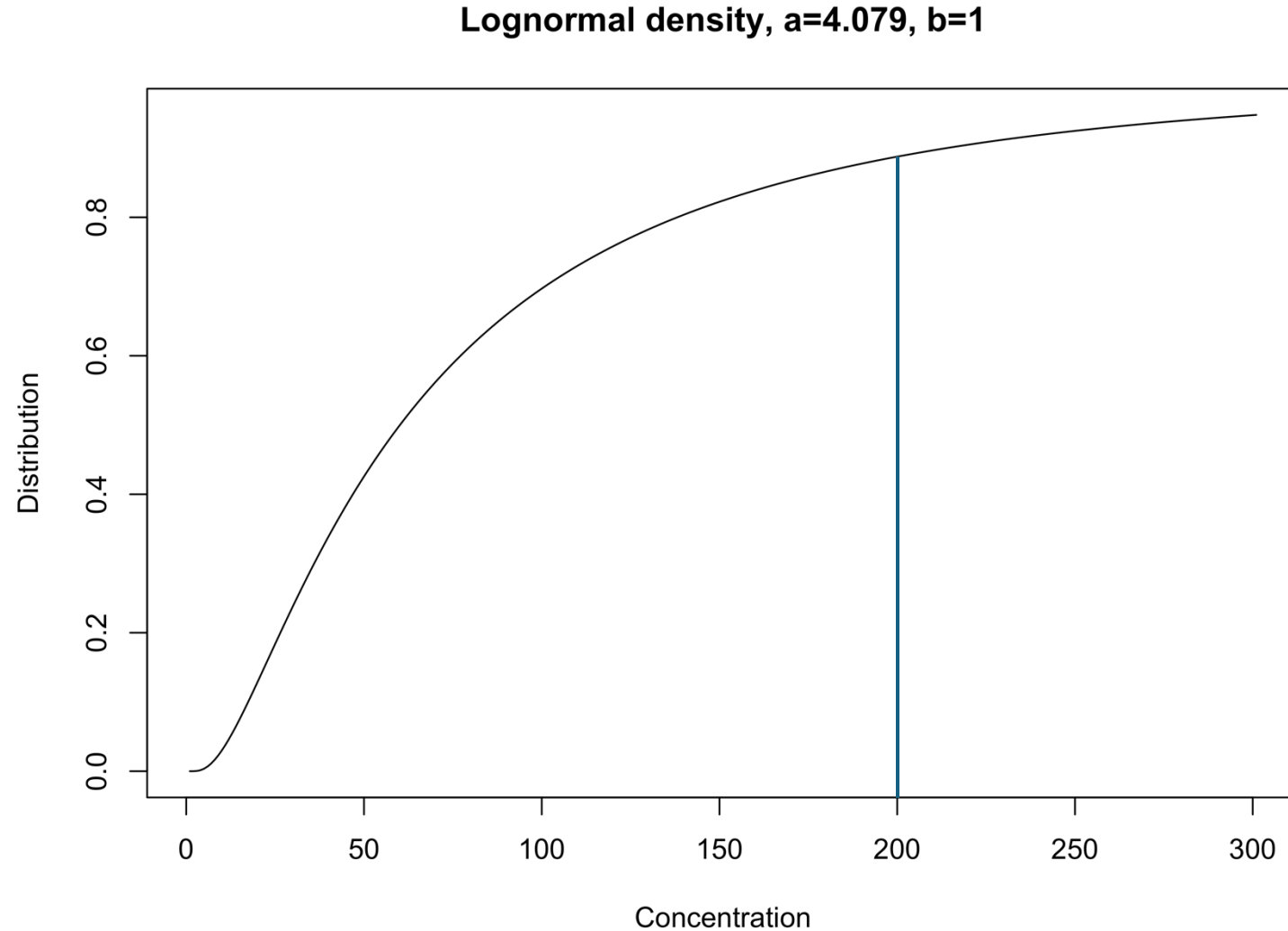
... e poniamoci una domanda



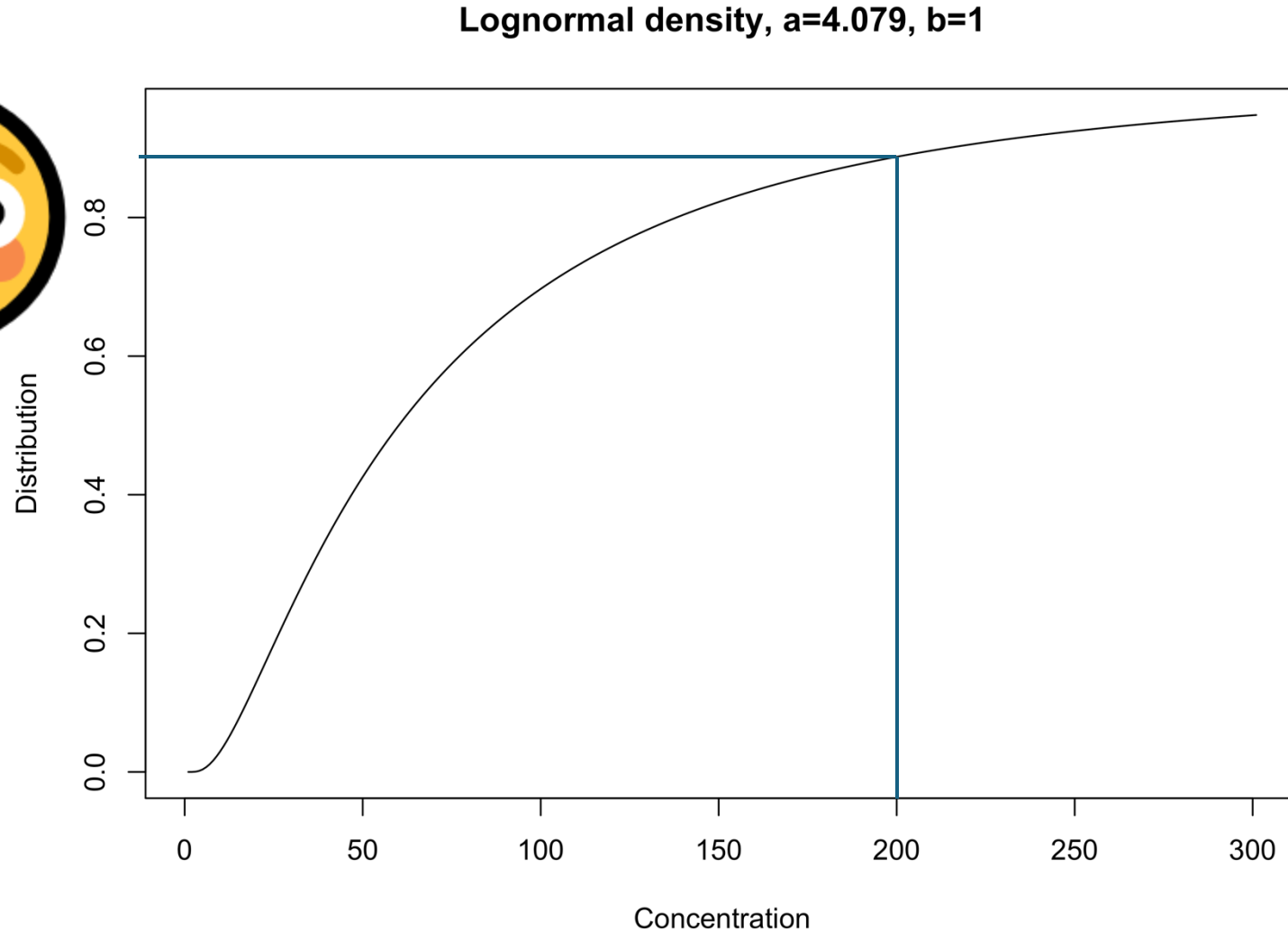
... e poniamoci una domanda



... e poniamoci una domanda



... e poniamoci una domanda



... e poniamoci una domanda

Qui abbiamo circa il 10% di probabilità di supero del limite.

Problema: **possiamo dirlo, con un modello gaussiano?**

Risposta

No!!!

Perché?

Parliamone insieme

Conclusioni

Conclusioni

- Il modello Gaussiano è una rappresentazione semplificata della realtà
- Tutti i modelli lo sono!
- La rappresentazione non è «giusta» o «sbagliata»: se mai, «interessante ai nostri fini», o no.
- I bachi non stanno davvero nel modello, ma nella sensatezza di quello che gli chiediamo.
- Alcune domande sono, in effetti, piuttosto insensate.
- Del resto, nessuno userebbe una chiave inglese per riempire un bicchiere di acqua.
- In ultima analisi, così, la colpa non è nella semplicità di un modello, ma dei nostri deficit di conoscenza.

Grazie per l'attenzione!

Mio riferimento:

patti.favaron@gmail.com